

**MAI 2 - domácí úkol** (dobrovolný) - k opakování diferenciálního a integrálního počtu z MAI 1

**Ukázka zápočtového testu z Matematické analýzy I** (ze ZS 2018-19)

(psal se 90 minut a bez "taháků")

(v každém příkladu si můžete vybrat z daných azdání)

1. Vypočítejte limitu ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}$ .

nebo

Vypočítejte limitu ( $n \in \mathbb{N}$ ):  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \log \left( 1 - \operatorname{tg} \frac{3}{n} \right)$ .

( $\log x$  je přirozený logaritmus)

2. V závislosti na parametru  $x \in \mathbb{R}$  vyšetřete, zda konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} (x-2)^n.$$

3. Funkce  $f$  je definována:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ pro } |x| < 1, \quad f(x) = 0 \text{ pro } |x| \geq 1.$$

Ukažte, že funkce  $f$  i její derivace  $f'$  jsou funkce spojité v  $\mathbb{R}$ .

nebo

Funkce  $f$  je definována:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{|x|} \text{ pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Vyšetřete spojitost funkce  $f$  v  $D_f$ . Dále zjistěte, pro která  $x \in D_f$  existuje derivace  $f'(x)$ , případně jednostranné derivace  $f'_+(x)$  nebo  $f'_-(x)$ . Tyto derivace spočítejte.

4. Nalezněte lokální a globální extrémy funkce

$$f(x) = \frac{|2x-1|}{(x-1)^2} \quad \text{nebo} \quad f(x) = |x-2| \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

nebo:

Vyšetřete průběh zadané funkce:

najděte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce  $f$  a limity v krajních bodech;  
vypočítejte první derivaci, vyšetřete monotonii, lokální a globální extrémy funkce  $f$ ;  
vypočítejte druhou derivaci, najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní;  
načrtněte graf funkce.

Výpočet integrálů:

1. Na maximálních možných intervalech najděte primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{\sqrt{2 - \cos^2(x)}} + \frac{3e^x + 5}{e^{2x} + 4e^x + 5}, \text{ nebo k } f(x) = \frac{\sqrt{\ln x} - 1}{x \ln x \cdot (\ln x - 2 \cdot \sqrt{\ln x + 2})}.$$

2. Aplikace určitého integrálu:

- Spočítejte obsah rovinné oblasti  $\omega$ , která je ohraničená grafy funkcí  $y = x \arctg x$ ,  $y = x^2$  a přímkou  $x = 1$ .
- Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti  $\omega$  kolem osy  $x$ , je-li oblast  $\omega$  ohraničená grafy funkcí  $y = x$ ,  $y = \arcsin x$  a přímkou  $x = 1$ .